**Лек 15.Метод Попова**

Решение задачи об абсолютной устойчивости системы с одной однозначной нелинейностью (т. е. устойчивости при любой форме этой нелинейности со слабым ограничением типа (17.54) или типа рис. 17.14) с помощью теорем прямого [метода Ляпунова](http://scask.ru/f_book_kiber1.php?id=747) было проиллюстрировано на двух примерах в § 17.2.

Изложим теперь частотный метод, предложенный румынским ученым В. М. Поповым [97], при использовании которого та же задача решается более просто приемами, аналогичными частотным способам исследования [устойчивости линейных систем](http://scask.ru/c_book_r_cos.php?id=9).

Если в системе автоматического регулирования имеется лишь одна однозначная нелинейность

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image1.gif

то, объединив вместе все остальные (линейные) уравнения системы, можно всегда получить общее уравнение линейной части системы (рис. 17.17, а) в виде

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image2.gif

где

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image3.gif

причем будем считать https://scask.ru/img_page/1.gif

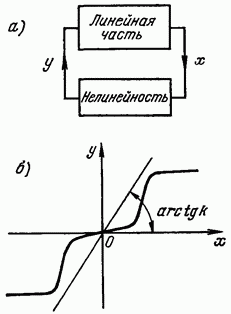


Рис. 17.17.

Пусть нелинейность https://scask.ru/img_page/2.gif имеет любое очертание, не выходящее за пределы заданного угла https://scask.ru/img_page/3.gif к (рис. 17.17, б), т. е. при любом х

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image5.gif

Пусть [многочлен](http://scask.ru/f_book_m_cat.php?id=22) https://scask.ru/img_page/4.gif или, что то же, [характеристическое уравнение](http://scask.ru/q_book_algebra.php?id=186) линейной части https://scask.ru/img_page/5.gif имеет все корни с отрицательными вещественными частями или же кроме них имеется еще не более двух нулевых корней.

Другими словами, допускается, чтобы https://scask.ru/img_page/6.gif или https://scask.ru/img_page/7.gif в выражении https://scask.ru/img_page/8.gif, т. е. не более двух нулевых полюсов в передаточной функции линейной части системы

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image6.gif

Приведем без доказательства формулировку теоремы В. М. Попова: для установления устойчивости [нелинейной системы](http://scask.ru/g_book_prs.php?id=78) достаточно подобрать такое конечное [действительное число](http://scask.ru/f_book_m_cat.php?id=18) https://scask.ru/img_page/9.gif при котором при всех

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image7.gif

где https://scask.ru/img_page/10.gif — амплитудно-фазовая [частотная характеристика](http://scask.ru/a_d_23.php) линейной части системы. При наличии одного нулевого полюса требуется еще, чтобы

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image8.gif

а при двух нулевых полюсах

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image9.gif

Теорема справедлива также и при наличии в знаменателе https://scask.ru/img_page/11.gif передаточной функции линейной части не более двух чисто мнимых корней, но при этом требуются некоторые другие простые добавочные условия [2], называемые условиями предельной устойчивости.

Другая формулировка той же теоремы, дающая удобную графическую интерпретацию, связана с введением видоизмененной [частотной характеристики](http://scask.ru/a_d_23.php) https://scask.ru/img_page/12.gif которая определяется следующим образом:

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image10.gif

где https://scask.ru/img_page/13.gif — нормирующий множитель.

График https://scask.ru/img_page/14.gif имеет вид (рис. 17.18, а), аналогичный https://scask.ru/img_page/15.gif когда в выражениях https://scask.ru/img_page/16.gif разность степеней https://scask.ru/img_page/17.gif

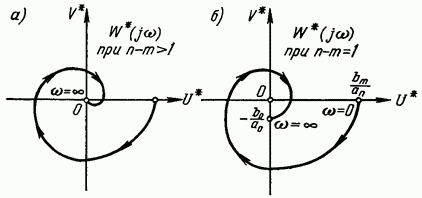


Рис. 17.18.

Если же разность степеней https://scask.ru/img_page/18.gif то конец графика https://scask.ru/img_page/19.gif будет на мнимой оси ниже начала координат (рис. 17.18, б).

Преобразуем левую часть [неравенства](http://scask.ru/a_book_e_math.php?id=87) (17.116):

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image12.gif

Тогда, положив

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image13.gif

и использовав соотношения (17.117), получим вместо (17.116) для теоремы В. М. Попова условие

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image14.gif

при всех https://scask.ru/img_page/20.gif

Очевидно, что равенство

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image15.gif

представляет [уравнение прямой](http://scask.ru/q_book_msh.php?id=29) на плоскости https://scask.ru/img_page/21.gif

Отсюда вытекает следующая графическая интерпретация теоремы В. М. Попова: для установления устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такую прямую на плоскости https://scask.ru/img_page/22.gif проходящую через точку https://scask.ru/img_page/23.gif чтобы вся кривая https://scask.ru/img_page/24.gif лежала справа от этой прямой.

На рис. 17.19 показаны случаи выполнения теоремы. В этих случаях [нелинейная система](http://scask.ru/g_book_prs.php?id=78) устойчива при любой форме однозначной нелинейности, ограниченной лишь условием (17.115). На рис. 17.20 показаны случаи, когда

теорема не выполняется, т. е. [нелинейная система](http://scask.ru/g_book_prs.php?id=78) не имеет абсолютной устойчивости.

Заметим, что, например, в задаче о самолете с автопилотом (§ 17.2) условие (17.54) означает любое расположение нелинейной характеристики во всем первом (и третьем) квадранте. Во всех подобных случаях согласно рис. 17.17 имеем https://scask.ru/img_page/25.gif.

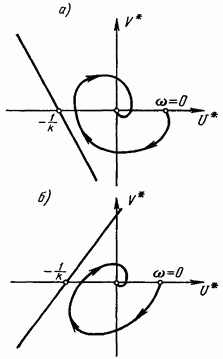


Рис. 17.19.

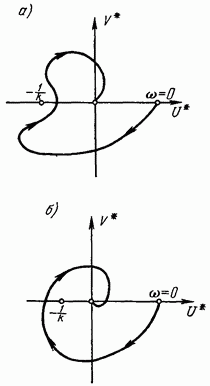


Рис. 17.20.

В теореме В. М. Попова при этом вместо (17.116) получаем условие

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image18.gif

а вместо (17.118)

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image19.gif

при всех https://scask.ru/img_page/26.gif Поэтому в графической интерпретации прямая должна проходить не так, как показано было на рис. 17.19, а через начало координат.

В частности, для указанного примера (§ 17.2) уравнения (17.63) можно» преобразовать к виду

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image20.gif

где обозначено https://scask.ru/img_page/27.gif причем https://scask.ru/img_page/28.gif — [производная](http://scask.ru/q_book_msh.php?id=117) по https://scask.ru/img_page/29.gif.

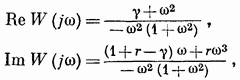
Передаточная функция линейной части системы будет

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image21.gif

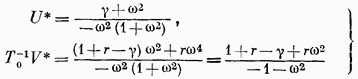
Отсюда

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image22.gif

Умножив числитель и знаменатель на https://scask.ru/img_page/30.gif получим



а согласно (17.117)



[Неравенство](http://scask.ru/a_book_e_math.php?id=87) (17.121) принимает вид

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image25.gif

Очевидно, что это неравенство может быть выполнено при любом https://scask.ru/img_page/31.gif если

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image26.gif

и если h берется сколь угодно большим, чтобы обеспечить неравенство (17.123) при сколь угодно малых со.

Полученное условие (17.124) выполняется при

https://scask.ru/archive/arch.php?path=../htm/edu.alnam/book_b_tau/files.book&file=b_tau_101.files/image27.gif

что точно совпадает с найденными ранее условиями абсолютной устойчивости данной системы (17.69) и (17.70). Смысл практической реализации этих условий был разъяснен в § 17.2.

Графически критерий устойчивости выражается в том, что вся кривая https://scask.ru/img_page/32.gif, построенная согласно (17.122), расположена (рис. 17.21, а) справа от прямой https://scask.ru/img_page/33.gif обозначенной штрих-пунктиром, со сколь угодно малым наклоном, если https://scask.ru/img_page/34.gif

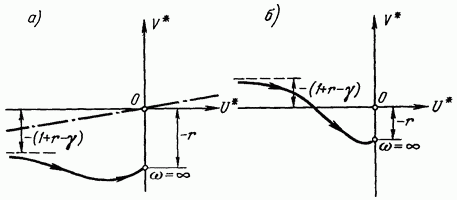


Рис. 17.21.

Если же https://scask.ru/img_page/35.gif (рис. 17.21, б), то такую прямую провести невозможно и, следовательно, [нелинейная система](http://scask.ru/g_book_prs.php?id=78) не будет абсолютно устойчивой.

Здесь был приведен простой пример, в котором условия устойчивости по методу В. М. Попова выражаются в общем буквенном виде. В большинстве технических задач этого не получится. Однако видно, что описанный частотный критерий устойчивости В. М. Попова для систем с одной однозначной нелинейностью в его графической форме может быть применен при любой сложности линейной части системы и численно заданных коэффициентах уравнений. Более того, он может быть применен в случае, когда не заданы уравнения, но известна экспериментально снятая амплитудно-фазовая [частотная характеристика](http://scask.ru/a_d_23.php) линейной части https://scask.ru/img_page/36.gif Чтобы установить устойчивость системы согласно рис. 17.19, https://scask.ru/img_page/37.gif надо перестроить в характеристику https://scask.ru/img_page/38.gif пользуясь формулами (17.117).